

京大2013入試問題Ⅰ(力学)

物 理

(3問題 100点)

物理問題 I

次の文章を読んで、 に適した式を、それぞれの解答欄に記入せよ。なお、 は、すでに で与えられたものと同じ式を表す。また、問1、問2では、指示にしたがって、解答をそれぞれの解答欄に記入せよ。

以下の設問では、地球は半径 R の球であり、密度は一様に分布していると考えてよい。また、地球の質量を M 、万有引力定数を G とし、地球の自転の影響、摩擦、および空気の抵抗は無いものとする。

- (1) 図1のように、地球の中心 O を通って直線状に掘られたトンネルを考える。トンネルは十分に細く、トンネルを掘ったことによる質量の変化は無視できるものとする。トンネル内の任意の1点 P ($OP = r$) で質量 m の質点に働く重力は、 O を中心とした半径 r の球の質量が中心 O に集まったとして、それと質点との間の万有引力に等しく、半径 r の球の外側の部分は、この点での重力には無関係であることが知られている。したがって、トンネル内の1点 P において質点に働く重力の大きさは、 m 、 M 、 R 、 r 、 G を使って ア と表すことができる。この力による質点の運動は単振動であり、その周期は イ で与えられる。

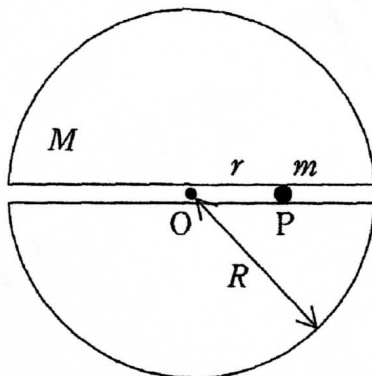


図1

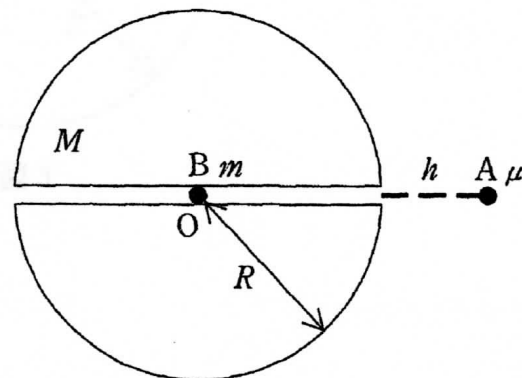


図2

(2) 次に、図2のように、トンネルを通る直線にそって、地表からの高さが h の点に質量 μ の質点 A を静かに置き、静止した状態からトンネルに落下させ、中心 O に静止している質量 m の質点 B に衝突させる。質点 A がトンネルに入る瞬間の速さは **ウ** で、中心 O に到達する直前の速さは **エ** である。衝突は弾性衝突であるとする、衝突直後の質点 A の速さは **オ**、質点 B の速さは **カ** となる。衝突後、質点 B は反対側の地表に達した。

問 1 $h = 0$ とした場合に、この後質点 B が無限の遠方に飛び去るために必要な $\frac{\mu}{m}$ の値の範囲を求めよ。導出の過程もあわせて示せ。

(3) 今度は、図3のように、地球の中心 O から $\frac{R}{2}$ だけ離れたところを通る直線状の細いトンネルを掘った。中心 O からの距離が r で、トンネルの中心 O' から x だけ離れたトンネル内の P 点にある質量 m の質点に働く重力の大きさは **ア** なので、その質点に働くトンネルにそった方向の力の大きさは、 m 、 M 、 R 、 x 、 G を使って **キ** で与えられる。したがって、地表で静止した状態からトンネルを通過して反対側の地表に出るまでにかかる時間は **ク** である。

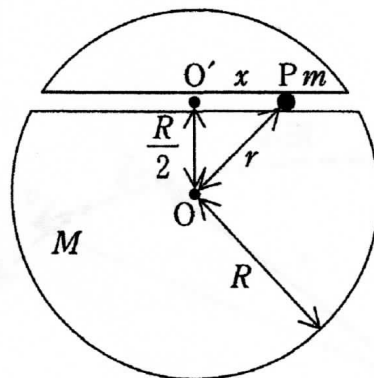


図 3

(4) 次に、図4のように、質量 μ の質点Aをトンネルの端点に静かに置き、静止した状態からトンネルに落とし、トンネルの中心 O' に静止している質量 m の質点Bに衝突させた。衝突は弾性衝突であるとする、質点Bが反対側の地表に達するための条件は $\mu \geq$ で与えられる。また、質点Bが地表から飛び出した後、再び地表にもどってくるための条件は $\mu <$ となる。

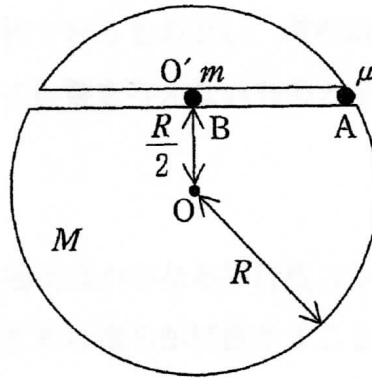


図4

問2 地表から飛び出した瞬間の質点Bの運動エネルギーが、そのときの位置エネルギーの大きさ $\frac{GMm}{R}$ の半分である場合を考える。地表を飛び出した後の質点Bの運動では、面積速度が一定となる。質点Bが地球から最も離れた地点に達したときの中心Oからの距離を求めよ。導出の過程もあわせて示せ。

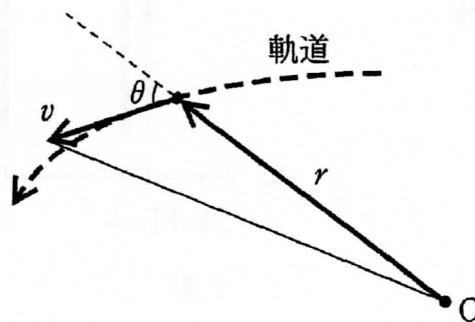


図5

なお、図5のように質点が地球の中心Oから距離 r の位置を速さ v で運動している場合、その面積速度は $\frac{1}{2}rv\sin\theta$ で与えられる。ただし、 θ は地球の中心Oから軌道上の質点に向かう方向と速度のなす角度である。