京大2013入試問題物理 I(力学)

No.

Date 20130714

解答-(1)

I (1) ア. $V=\frac{4}{3}\pi R^3$ [m^3]　$\rho = M/V$ [kg/m^3]

$$V_r = \frac{4}{3}\pi r^3 \quad M_r = \rho V_r = \frac{V_r}{V}M = \left(\frac{r}{R}\right)^3 M$$

万有引力は質量の積に比例し、距りの2乗に反比例する。その比例定数は G

$$\therefore\quad F = G\frac{M_r m}{r^2} = G\cdot\frac{r^3 Mm}{R^3\cdot r^2} = \overset{\text{ア.}}{\boxed{G\frac{Mm}{R^3}r}}$$

イ.

$$F = ma = m\ddot{r}$$

$$-\frac{GMm}{R^3}\cdot r = m\ddot{r}$$

$$\ddot{r} + \frac{GM}{R^3}\cdot r = 0$$

$r = A\sin\omega t$ とおくと　$\dot{r} = A\omega\cos\omega t$

$$\ddot{r} = -A\omega^2\sin\omega t = -\omega^2 r$$

$$\therefore -\omega^2 + \frac{GM}{R^3} = 0 \qquad \omega = \sqrt{\frac{GM}{R^3}} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{GM}{R}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \overset{\text{イ.}}{\boxed{2\pi R\sqrt{\frac{R}{GM}}}}$$

No.

Date 20130714

解答 ー(2)

(2) ウ. 力学的エネルギー保存則

(地表面での運動エネルギー) + (地表面での位置エネルギー)

= (高さhでの位置エネルギー)

$$\frac{1}{2}\mu v_0^2 - G\frac{M\mu}{R} = -G\frac{M\mu}{R+h}$$

ウ.

$$\therefore\ v_0 = \boxed{\sqrt{2GM\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h}\right)}}$$

エ. バネ定数 $k = \dfrac{GM\mu}{R^3}$ の単振動

地表面のバネの位置エネルギー $\frac{1}{2}kR^2$

力学的エネルギーの保存則より

$$\frac{1}{2}\mu v_1^2 = \frac{1}{2}\mu v_0^2 + \frac{1}{2}kR^2 = \frac{1}{2}\mu v_0^2 + \frac{1}{2}\frac{GM\mu}{R}$$

$$v_1^2 = v_0^2 + \frac{GM}{R} = 2GM\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h}\right) + \frac{GM}{R}$$

$$= GM\left(\frac{3}{R} - \frac{2}{R+h}\right)$$

エ.

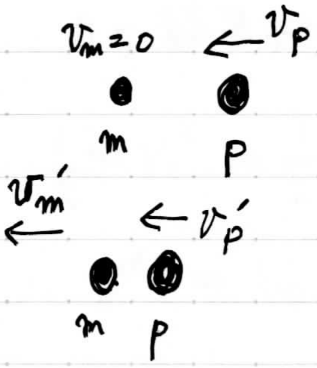
$$\therefore\ v_1 = \boxed{\sqrt{GM\left(\frac{3}{R} - \frac{2}{R+h}\right)}}$$

No.

Date 20130714

解答 一(3)

(2) オ.
カ.



弾性衝突なので

$$e = \frac{v_m' - v_p'}{v_p - v_m} = \frac{v_m' - v_p'}{v_p} = 1$$

$$\therefore \quad v_m' = v_p + v_p' \qquad \text{——(a)}$$

運動量保存則より

$$\mu v_p = \mu v_p' + m v_m' \qquad \text{——(b)}$$

(a) → (b) $\quad \mu v_p = \mu v_p' + m(v_p + v_p')$

$$\therefore \quad v_p' = \frac{\mu - m}{\mu + m} v_p$$

$$v_m' = \frac{2\mu}{\mu + m} v_p$$

エ.の結果を代入し

オ.

$$|v_p'| = \boxed{\frac{|\mu - m|}{\mu + m}\sqrt{GM\left(\frac{3}{R} - \frac{2}{R+h}\right)}}$$

カ.

$$v_m' = \boxed{\frac{2\mu}{\mu + m}\sqrt{GM\left(\frac{3}{R} - \frac{2}{R+h}\right)}}$$

No.

Date 20130714

解答一(4)

問1　カの結果より　$h=0$　$V_0 = \dfrac{2\mu}{\mu+m}\sqrt{\dfrac{GM}{R}}$

$$\frac{1}{2}mV_0^2 = \frac{1}{2}mV'^2 + \frac{1}{2}k'R^2 \quad \left(k' = \frac{GMm}{R^3} \text{ の単振動}\right)$$

$$\therefore V'^2 = V_0^2 \cancel{+} - \frac{GM}{R} = \left(\frac{2\mu}{\mu+m}\right)^2\frac{GM}{R} - \frac{GM}{R}$$

質点Bが無限遠方まで飛び去るための条件は

$$\frac{1}{2}mV'^2 - G\frac{Mm}{R} \geqq 0 \quad \therefore V'^2 > \frac{2GM}{R}$$

よって

$$\left(\frac{2\mu}{\mu+m}\right)^2\cdot\frac{GM}{R} - \frac{GM}{R} \geqq \frac{2GM}{R} \quad \therefore \left(\frac{2\mu}{\mu+m}\right)^2 \geqq 3$$

$\dfrac{\mu}{m} = \alpha$ とおくと　$\left(\dfrac{2\alpha}{\alpha+1}\right)^2 \geqq 3$　$\therefore \alpha^2 - 6a - 3 \geqq 0$

$\alpha^2 - 6\alpha - 3 = 0$ の解は　$\alpha = 3 \pm \sqrt{12} = 3 \pm 2\sqrt{3}$

$a > 0$　$\therefore$　$\alpha \geqq 3 + 2\sqrt{3}$ //

Date 20130714

解答 -(5)

(3) キ. $f' = \frac{GMm}{R^3} r \cdot \cos\theta = \frac{GMm}{R^3} r \cdot \frac{x}{r} \overset{キ.}{=} \boxed{\frac{GMm}{R^3} x}$

ク. $ma' = -\frac{GMm}{R^3} \cdot x \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{GM}{R^3}}$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}}$$

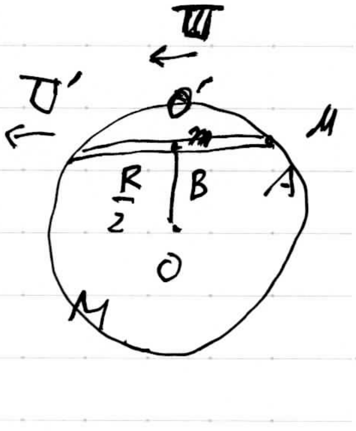
半周期 $\quad T/2 \overset{ク.}{=} \boxed{\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}}}$

(4) ケ. エ.の計算過程で $k = \frac{GM\mu}{R^3}$ は同じで，$v_1 \to u_1$，$v_0 \to 0$，$R \to \frac{\sqrt{3}}{2}R$ として

$\frac{1}{2}\mu u_1^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{GM\mu}{R^3} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}R\right)^2 \quad u_1^2 = \frac{3GM}{4R} \quad \therefore u_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3GM}{R}}$

衝突直後の質点Bの速さをUとすると，オ.カの計算過程より

$$U = \frac{2\mu}{\mu+m}u_1 = \frac{\mu}{\mu+m}\sqrt{\frac{3GM}{R}}$$



問1で $k' = \frac{GMm}{R^3}$ は同じで $V_0 \to U$，$V' \to U'$

$R \to \frac{\sqrt{3}}{2}R$ として，

$$\frac{1}{2}mU^2 = \frac{1}{2}mU'^2 + \frac{1}{2}\frac{GMm}{R^3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}R\right)^2$$

$$U'^2 = U^2 - \frac{3GM}{4R}$$

$U' \geqq 0 \qquad U^2 \geqq \frac{3GM}{4R} \qquad \therefore U \geqq \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3GM}{R}}$

$\frac{\mu}{\mu+m}\sqrt{\frac{3GM}{R}} \geqq \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3GM}{R}} \quad \therefore 2\mu \geqq \mu + m$

$\therefore \quad \mu \geqq \overset{ケ.}{\boxed{m}}$

No.

Date 20130714

解答－(6)

(4) エ.

$$\frac{1}{2}mU'^2 - G\frac{Mm}{R} < 0 \quad \therefore U'^2 < \frac{2GM}{R}$$

ウ. より $$U^2 - \frac{3GM}{4R} < \frac{2GM}{R}$$

$$\left(\frac{\mu}{\mu+m}\right)^2 \cdot \frac{3GM}{R} < \frac{11GM}{4R}$$

$$12\mu^2 < 11(\mu^2 + 2m\mu + m^2)$$

$$\mu^2 - 22m\mu - 11m^2 < 0$$

$\mu^2 - 22m\mu - 11m^2 = 0$ の解は

$$\mu = (11 \pm \sqrt{11^2 + 11})m$$
$$= (11 \pm \sqrt{132})m$$
$$= (11 \pm 2\sqrt{33})m$$

$\mu > 0$ より

エ. $$\mu < \boxed{(11 + 2\sqrt{33})m}$$

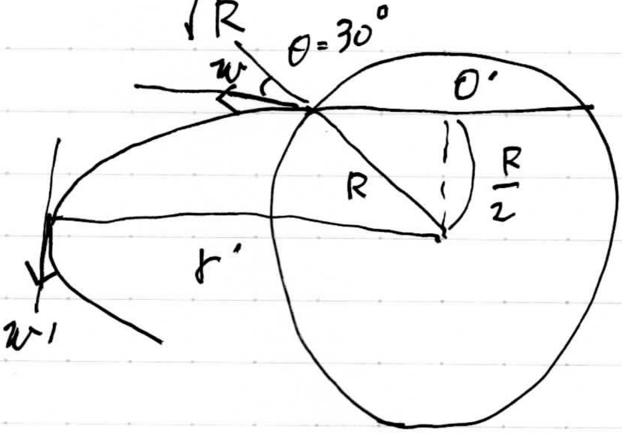
No.

Date 20130714

解答一(7)

問2

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{GMm}{R} \qquad \therefore\ v = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$



$$\frac{1}{2}\frac{GMm}{G} - \frac{GMm}{R}$$

$$= \frac{1}{2}mv'^2 - \frac{GMm}{r'}$$

$$\therefore\ -\frac{GM}{R} = v'^2 - \frac{2GM}{r'}$$

面積速度一定より

$$\frac{1}{2}Rv\sin 30^\circ = \frac{1}{2}r'v' \qquad \therefore\ v' = \frac{R}{2r'}v$$

よって

$$-\frac{GM}{R} = \frac{R^2}{4r'^2}\cdot\frac{GM}{R} - \frac{2GM}{r'}$$

$$4r'^2 - 8Rr' + R^2 = 0$$

$$r' = \frac{1}{4}(4 \pm \sqrt{12})R = \frac{2 \pm \sqrt{3}}{2}R$$

$r' > R$ より

$$r' = \frac{2+\sqrt{3}}{2}R$$ //